

力学Ⅰ 期末前試験

各設問とも導出過程を記すこと。「書け」と書かれている設問以外で結果のみの答えは0点とする。

問題文中に出てこない文字を用いる際は明確に定義すること。

各設問の回答に矛盾がある場合、矛盾のある回答全てを0点とする。

問題 1 一様な密度 ρ を持つ球殻 (内側の半径 a 、外側の半径 b とする) が球殻の中心 O から距離 z 離れた点 P にある質量 m の質点に及ぼす万有引力を以下の問いに従って求めよ。

- (1) 極座標で $[r, r + dr]$ 、 $[\theta, \theta + d\theta]$ 、 $[\phi, \phi + d\phi]$ の間にある微小要素 Q の体積を求めよ。
- (2) 直線 QP の長さを s とする。 s を z, r, θ を用いて表せ。
- (3) 原点と点 P とを結んだ直線と直線 QP のなす角度を α とする。 $\cos \alpha$ を s, z, r, θ を用いて表せ。
- (4) 微小要素 Q が質点に及ぼす万有引力を求めよ。
- (5) 点 P が球殻の外にあるか内にあるかで場合分けして s の最大値・最小値を求めよ。
- (6) (2) で求めた万有引力を球殻全体で積分することにより、球殻全体が質点に及ぼす万有引力を求めよ。このとき、点 P が球殻の外にあるか内にあるかで場合分けすること。

問題 2 質量 m の質点が

$$f(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x^3} \quad (\alpha, \beta > 0, x > 0)$$

の式で表される力を受けて x 軸上を運動するとき、以下の問いに答えよ。

- (1) ポテンシャルを図示し、ポテンシャルが最小となる位置および最小値を求めよ。
- (2) 質点が振動するために質点の持つ全エネルギーに対する条件を求めよ。
- (3) (1) の時、振動の範囲を求めよ。
- (4) (1) の時、振動の周期を求めよ。ここで、

$$\int_d^c \frac{x}{\sqrt{(x-c)(d-x)}} dx = -(c+d) \frac{\pi}{2}$$

を用いてよい。

- (5) 質点を $x = a (> \frac{\beta}{2\alpha})$ から静かに放した。この時、振動の範囲と周期を求めよ。

問題 3 中心力を受け以下のような軌道で運動する質量 m の質点がある。

$$r = a \cos \theta$$

この時、この質点にはどのような中心力が働いているか、以下の問いに従って求めよ。

- (1) x, y 方向の速度、加速度を極座標 r, θ を用いて表せ。
- (2) 中心力を

$$\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r$$

として動径方向および角度方向の運動方程式をそれぞれ求めよ。

- (3) 面積速度 h を用いると $\frac{d}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta}$ と書ける。これを用いて上の軌道を実現するために必要な動径方向の加速度を求めよ。
- (4) (2) で求めた動径方向の加速度と動径方向の運動方程式を用いて $f(r)$ を求めよ。